7. Vlastnosti posloupností

POZNÁMKA: Posloupnost je speciální případ funkce, kde $D = N$ => vlastnosti obdobné funkcím, např.:
FCE ROSTOUCÍ [KLESAJÍCÍ]: $\forall x_1, x_2 \in D(f)$: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ $[f(x_1) > f(x_2)]$

MONOTÓNNOST

Def. POSLOUPNOST $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá
- ROSTOUCÍ [NEKLESAJÍCÍ] $\Leftrightarrow \forall r, s \in N: r < s \Rightarrow a_r < a_s$ $[a_r \leqq a_s]$
- KLESAJÍCÍ [NEROSTOUCÍ] $\Leftrightarrow \forall r, s \in N: r < s \Rightarrow a_r > a_s$ $[a_r \geqq a_s]$

Věty
Každá posloupnost rostoucí je neklesající.
Každá posloupnost klesající je nerostoucí.

Def.
Posloupnosti, které jsou NEROSTOUCÍ nebo NEKLESAJÍCÍ, nazýváme MONOTÓNNÍ.

Věty (výhodné pro počítání)
Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je
- ROSTOUCÍ [NEKLESAJÍCÍ] $\Leftrightarrow \forall n \in N$: $a_{n+1} > a_n$, tj. $a_{n+1} - a_n > 0$
  $[a_{n+1} \geqq a_n$, tj. $a_{n+1} - a_n \geqq 0]$
- KLESAJÍCÍ [NEROSTOUCÍ] $\Leftrightarrow \forall n \in N$: $a_{n+1} < a_n$, tj. $a_{n+1} - a_n < 0$
  $[a_{n+1} \leqq a_n$, tj. $a_{n+1} - a_n \leqq 0]$
- KONSTANTNÍ $\Leftrightarrow \forall n \in N$: $a_{n+1} = a_n$, tj. $a_{n+1} - a_n = 0$

POZNÁMKA: každá posloupnost nemusí být monotónní.

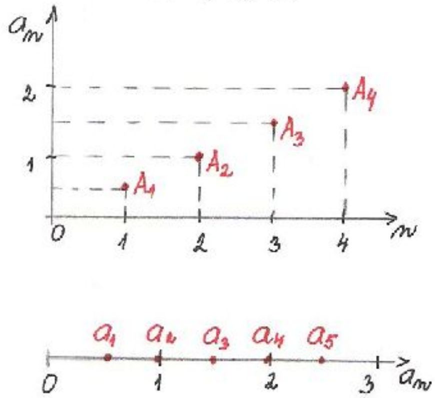
GRAF POSLOUPNOSTI

- množina IZOLOVANÝCH BODŮ $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$, kde $A_n[n, a_n]$, $n \in N$, $a_n \in R$
- znázornění: v soustavě souřadnic $0xy$ nebo jen na číselné ose

Příklady

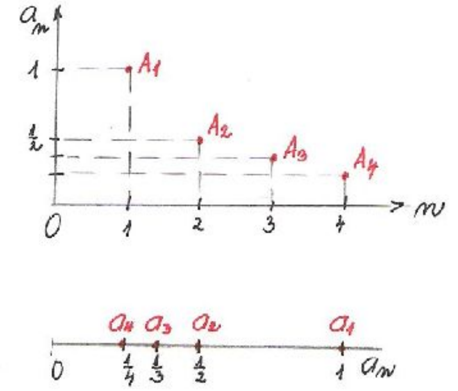
① a) $\left(\frac{n}{2}\right)_{n=1}^{\infty}$

$\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \ldots$ ROST



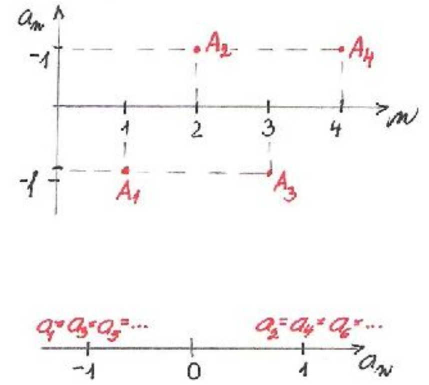
b) $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ KLES



c) $\left((-1)^n\right)_{n=1}^{\infty}$

$-1, 1, -1, 1, \ldots$ NENÍ MONOTÓNNÍ



② Rozhodněte o monotónnosti posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, kde

a) $a_n = (-2)^n$ $\quad \underbrace{a_1 = -2, a_2}_{a_1 < a_2} = \underbrace{4, a_3}_{a_2 > a_3} = -8$ není rostoucí ani klesající

b) $a_n = \frac{n}{n+1}$ $\quad a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{2}{3}, a_3 = \frac{3}{4}, a_4 = \frac{4}{5}$ mohla by být rostoucí, nutno dokázat

- rostoucí $\Leftrightarrow \forall n \in N: a_{n+1} > a_n$, tj: $a_{n+1} - a_n > 0$

$a_n = \frac{n}{n+1} \quad a_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$

(1. zp.) $a_{n+1} > a_n$

$$\frac{n+1}{n+2} > \frac{n}{n+1} \quad / \cdot \underbrace{(n+2)(n+1)}_{>0}$$

$n^2 + 2n + 1 > n^2 + 2n$ neměníme zn.

$1 > 0$ pl. $\Rightarrow$ ROSTOUCÍ

(2. zp.) $a_{n+1} - a_n > 0$ ANULOVAT

$$\frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} > 0$$

$$\frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+1)(n+2)} > 0$$

$$\frac{n^2 + 2n + 1 - n^2 - 2n}{(n+1)(n+2)} > 0$$

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0 \quad \frac{\oplus}{\oplus} = \oplus$$

pl. pro $\forall n \in N$ ... ROSTOUCÍ

(3. zp.) PŘES ROZDÍL

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} =$$

$$= \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2 + 2n + 1 - n^2 - 2n}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0 \quad \left(\frac{\oplus}{\oplus} = \oplus\right)$$

pro $\forall n \in N$ ... ROSTOUCÍ

③ Dokažte, že

a) $\left(\frac{n+1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ je klesající $\quad a_{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$, $a_n = \frac{n+1}{n}$

(3. zp.) PŘES ROZDÍL

$\forall n \in N: a_{n+1} - a_n > 0$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+2}{n+1} - \frac{n+1}{n} = \frac{n(n+2) - (n+1)^2}{n(n+1)} = \frac{n^2 + 2n - (n^2 + 2n + 1)}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0 \left[\frac{\ominus}{\oplus} = \ominus\right]$$

pro $\forall n \in N$ $\Rightarrow$ KLESAJÍCÍ

b) $\left(\frac{2n+1}{n+2}\right)_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí $\quad a_n = \frac{2n+1}{n+2}$, $a_{n+1} = \frac{2(n+1)+1}{(n+1)+2} = \frac{2n+3}{n+3}$

(1. zp.) $a_{n+1} - a_n > 0$

$$\frac{2n+3}{n+3} - \frac{2n+1}{n+2} > 0$$

$$\frac{(2n+3)(n+2) - (2n+1)(n+3)}{(n+2)(n+3)} > 0$$

$$\frac{2n^2 + 4n + 3n + 6 - (2n^2 + 6n + n + 3)}{(n+2)(n+3)} > 0$$

$$\frac{3}{(n+2)(n+3)} > 0 \left[\frac{\oplus}{\oplus} = \oplus\right]$$

pl. $\forall n \in N \Rightarrow$ ROSTOUCÍ

④ Rozhodněte, které posloupnosti jsou rostoucí nebo klesající

a) $(n^2)_{n=1}^{\infty}$ $\quad a_n = n^2 \quad a_{n+1} = (n+1)^2 \quad 1, 4, 9, \ldots$? rost.

3. zp. - přes rozdíl

$a_{n+1} - a_n = (n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1 > 0 \; \forall n \in N \Rightarrow$ ROSTOUCÍ

b) $\left(\frac{1}{n^3}\right)_{n=1}^{\infty}$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)^3} - \frac{1}{n^3} = \frac{n^3 - (n+1)^3}{n^3(n+1)^3} = \frac{n^3 - (n^3 + 3n^2 + 3n + 1)}{n^3(n+1)^3} = \frac{-3n^2 - 3n - 1}{n^3(n+1)^3} < 0 \left[\frac{\ominus}{\oplus} = \ominus\right]$$

pro $\forall n \in N \Rightarrow$ KLESAJÍCÍ

c) $(3^n)_{n=1}^{\infty}$ $\quad a_n=3^n,\ a_{n+1}=3^{n+1}$ $\quad 3, 9, 27, \dots$? rost.

(3. zp.) přes rozdíl

$a_{n+1}-a_n = 3^{n+1}-3^n = 3\cdot 3^n-3^n = 3^n(3-1)=2\cdot 3^n>0$ pro $\forall n\in N$ … ROSTOUCÍ

(1. zp.) $\forall n\in N:\ a_{n+1}>a_n$

$3^{n+1}>3^n$

$3\cdot 3^n>3^n \quad | : \underset{>0}{3^n}$ neměníme zn. nerov.

$3>1$

pl. => ROSTOUCÍ

lze i jinak (jako exp. nerci)

$3^{n+1}>3^n \quad a=3>1$

$n+1>n$

$1>0$ pl. => ROSTOUCÍ

EXPONENCIÁLNÍ FCE $y=a^x$

$D=R$
$H=R^+$

PŘI ŘEŠENÍ EXP. NEROVNIC

$a^x>a^y$

$a>1$ → $x>y$ neměníme zn. nerovnosti

$a\in(0,1)$ → $x<y$ (změna zn. nerov.)

d) $(0{,}8^n)_{n=1}^{\infty}$ $\quad 0{,}8=\frac{4}{5} \Rightarrow 0{,}8=\frac{4}{5},\ 0{,}64=\frac{16}{25},\ \frac{64}{25}, \dots$? KLES.

(3. zp.) $a_{n+1}-a_n = 0{,}8^{n+1}-0{,}8^n = 0{,}8\cdot 0{,}8^n-0{,}8^n = 0{,}8^n(0{,}8-1) = -\underset{\oplus}{0{,}2}\cdot\underset{\oplus}{0{,}8^n}<0$ KLES.

(1. zp.) $\forall n\in N:\ a_{n+1}<a_n$? KLES.

$0{,}8^{n+1}<0{,}8^n$

$0{,}8\cdot 0{,}8^n<0{,}8^n \quad | : \underset{>0}{0{,}8^n}$

$0{,}8<1$

pl. => KLES.

jako exp. nerci

$0{,}8^{n+1}<0{,}8^n \quad a=0{,}8=\frac{4}{5}<1$

$\left[\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}<\left(\frac{4}{5}\right)^n\right]$ změna zn. nerov.

$n+1 \overset{!}{>} n$

$1>0$ pl. => KLES.

e) $(\log_7 n)_{n=1}^{\infty}$

(3. zp.) - přes rozdíl

viz vztahy

$a_{n+1}-a_n = \log_7(n+1)-\log_7 n =$

$= \log_7\frac{n+1}{n} = \log_7\left(1+\frac{1}{n}\right)$ z grafu >0

=> ROSTOUCÍ

(1. zp.) $a_{n+1}>a_n$

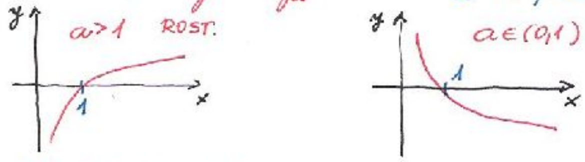
$\log_7(n+1)>\log_7 n \quad |$ odlog. $a=7>1$ neměníme zn. ner.

$n+1>n$

$1>0$ pl.

=> ROST.

LOGARITMICKÁ FCE $y=\log_a x$ $\quad D=R^+,\ H=R$



PŘI ŘEŠENÍ LOG. NEROVNIC

$\log_a x>\log_a y$

$a>1$: $x>y$ (neměníme zn. ner.)

$a\in(0,1)$: $x<y$ (změna zn. nerov.)

VZTAHY

$\log_a x+\log_a y=\log_a(x\cdot y) \quad x,y>0$

$\log_a x-\log_a y=\log_a\frac{x}{y}$

$\log_a x^r = r\log_a x$

f) $(\log_{0,4} n)_{n=1}^{\infty}$ $\quad a=0{,}5\in(0,1)$ kles.?

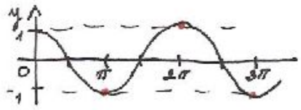
(1. zp.) $\log_{0,4}(n+1)<\log_{0,4} n$ $\quad a=0{,}4\in(0,1)$ změna zn. nerov.

$n+1 \overset{!}{>} n$

$1>0$ pl.

=> KLES.

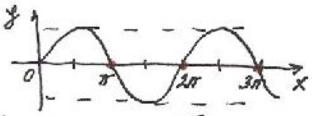
g) $(\cos n\pi)_{n=1}^{\infty}$



$a_1 = \cos\pi = -1$
$a_2 = \cos 2\pi = 1 \quad a_3 = -1$

NENÍ MONOTÓNNÍ - ani rost., ani kles.

ch) $(\sin n\pi)_{n=1}^{\infty}$



$a_1 = 0,\ a_2 = 0,\ a_3 = 0, \dots$ KONSTANTNÍ

$\underbrace{\sin(n+1)\pi}_{0} - \underbrace{\sin n\pi}_{0} = 0 - 0 = 0$ pro $\forall n \in N$

h) DÚ $\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)_{n=1}^{\infty}$ $\quad a_1 = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2},\ a_2 = \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{6},\ a_3 = \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{1}{12}, \dots$? KLES

2. zp.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n-(n+2)}{n(n+1)(n+2)} = \frac{-2}{n(n+1)(n+2)} < 0 \left[\frac{\ominus}{\oplus} = \ominus\right]$$

KLES.

1. zp. $a_{n+1} < a_n$

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} < \frac{1}{n(n+1)} \quad /\cdot \underbrace{n(n+1)(n+2)}_{>0} \text{ neměníme zn. ner.}$$

$n < n+2$

$0 < 2$ pl. => KLESAJÍCÍ

5) Pro která $x \in R$ je posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, kde

a) $a_n = \frac{nx}{n+1}$ rostoucí (klesající)

$\forall n \in N$: $a_{n+1} > a_n$ ROST.

$$\frac{(n+1)x}{(n+1)+1} > \frac{nx}{n+1} \quad /\cdot(n+2)(n+1)$$

$(n+1)^2 x > (n+2)nx$

$(n^2+2n+1)x > n^2x + 2nx$

$n^2x + 2nx + x > n^2x + 2nx$

$x > 0$ ... ROSTOUCÍ

($x < 0$ ... KLESAJÍCÍ)

b) DÚ $a_n = \frac{3nx}{n+1}$ klesající

$\forall n \in N$: $a_{n+1} < a_n$ KLES.

$$\frac{3(n+1)x}{(n+1)+1} < \frac{3nx}{n+1} \quad /\cdot(n+2)(n+1)$$

$3x(n+1)^2 < 3xn(n+2)$

$3x(n^2+2n+1) < 3xn^2 + 6xn$

$3xn^2 + 6xn + 3x < 3xn^2 + 6xn$

$3x < 0 \quad /:3$

$x < 0$ KLESAJÍCÍ

c) $a_n = \left(\frac{nx}{2n-1}\right)$ rostoucí

$\forall n \in N$: $a_{n+1} > a_n$

$$\frac{(n+1)x}{2(n+1)-1} > \frac{nx}{2n-1}$$

NEROVNICE - POZOR NA ZNAMÉNKO NEROVNOSTI

$$\frac{(n+1)x}{2n+1} > \frac{nx}{2n-1} \quad /\cdot \underbrace{(2n+1)}_{>0}\cdot\underbrace{(2n-1)}_{>0} \text{ pro } \forall n \in N \Rightarrow \text{neměníme zn. nerov.}$$

$(2n-1)(n+1)x > nx(2n+1)$

$(2n^2+2n-n-1)x > 2n^2x + nx$

$\cancel{2n^2x} + \cancel{2nx} - \cancel{nx} - x > \cancel{2n^2x} + \cancel{nx}$

$-x > 0 \quad /\cdot(-1)$

$x < 0$ ROSTOUCÍ

→ ANULOVAT

$$\frac{(n+1)x}{2(n+1)-1} - \frac{nx}{2n-1} > 0$$

$$\frac{(n+1)x\cdot(2n-1) - nx(2n+1)}{(2n+1)(2n-1)} > 0$$

$$\frac{(2n^2+2n-n-1)x - 2n^2x - nx}{(2n+1)(2n-1)} > 0$$

$$\frac{2n^2x + 2nx - nx - x - 2n^2x - nx}{(2n+1)(2n-1)} > 0$$

$$\frac{-x}{\underbrace{(2n+1)}_{\oplus}\underbrace{(2n-1)}_{\oplus}} > 0 \quad /\cdot(2n+1)(2n-1) > 0$$

nebo ←

$\frac{\ominus}{\oplus} > 0$ $\quad \frac{-x}{(2n+1)(2n-1)} > 0$

<=> $-x > 0$

$x < 0$

$-x > 0 \quad /\cdot(-1)$

$x < 0$ ROSTOUCÍ

⑥ Rozhodněte, které z posloupností jsou rostoucí, klesající

a) AP: $a_1=-2,\ d=1$

$a_n=a_1+(n-1)d$

$a_n=-2+(n-1)1$

$a_n=-3+n \qquad a_{n+1}=-3+(n+1)$

$a_{n+1}-a_n=-3+n+1+3-n=1>0$

=> ROSTOUCÍ

b) AP: $a_1=3,\ d=-0{,}3$

$a_n=3+(n-1)(-0{,}3)$

$a_n=3-0{,}3n+0{,}3$

$a_n=3{,}3-0{,}3n \qquad a_{n+1}=3{,}3-0{,}3(n+1)$

$a_{n+1}-a_n=3{,}3-0{,}3n-0{,}3-3{,}3+0{,}3n=$

$=-0{,}3<0$ ... KLESAJÍCÍ

c) AP: $a_1=\sqrt{2},\ d=0$

$a_1=\sqrt{2},\ a_2=\sqrt{2},\dots$

KONSTANTNÍ

Věta

ARITMETICKÁ POSLOUPNOST je ROSTOUCÍ pro $d>0$, KLESAJÍCÍ pro $d<0$ (konstantní pro $d=0$)

ARITMETICKÁ POSLOUPNOST je LINEÁRNÍ FCE $y=ax+b$, kde $D=N$

$a_n=a_1+(n-1)d$

$a_n=a_1+nd-d$

$a_n=dn+a_1-d$

$y=ax+b$

př. viz ⑥ $a_n=n-3$ $[y=x-3]$ $\qquad a_n=-0{,}3n+3{,}3$ $[y=-0{,}3x+3{,}3]$

⑦ Rozhodněte, zda daná GP jsou rostoucí nebo klesající

a) $a_1=2,\ q=2$

$a_n=a_1q^{n-1}=2\cdot2^{n-1}=2^n$

$a_{n+1}=2^{n+1}$? rost.

$a_{n+1}-a_n=2^{n+1}-2^n=2\cdot2^n-2^n$

$=2^n(2-1)=2^n>0$ ROST.

b) $a_1=\frac{1}{2},\ q=\frac{1}{2}$

$a_n=a_1q^{n-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$a_{n+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

$a_{n+1}-a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1}{2}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$=\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n}_{\oplus}\underbrace{\left(\frac{1}{2}-1\right)}_{\ominus}<0$ KLES.

Věta

GEOMETRICKÁ POSLOUPNOST $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s kvocientem q je

a) ROSTOUCÍ $\Leftrightarrow$ $a_1>0,\ q>1$ nebo $a_1<0,\ 0<q<1$

b) KLESAJÍCÍ $\Leftrightarrow$ $a_1>0,\ 0<q<1$ nebo $a_1<0,\ q>1$

GEOMETRICKÁ POSLOUPNOST je exponenciální fce $y=a^x$, kde $a\neq0$, $D=N$

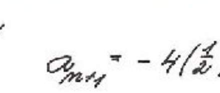
c) $a_1=-2,\ q=\frac{1}{2}$

$a_n=(-2)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=(-2)\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=(-2)\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot\left(\frac{2}{1}\right)^1=-4\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$a_{n+1}=-4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=-4\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$=-2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$a_{n+1}-a_n=-2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n+4\left(\frac{1}{2}\right)^n=\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n}_{\oplus}\cdot\underbrace{2}_{\oplus}>0$ ROSTOUCÍ



d) $a_1=-\frac{1}{2},\ q=2$

$a_n=\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot2^{n-1}=\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot2^n\cdot\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}\cdot2^n \qquad a_{n+1}=-\frac{1}{4}\cdot2^{n+1}=-\frac{1}{4}\cdot2^n\cdot2=-\frac{1}{2}\cdot2^n$

$a_{n+1}-a_n=-\frac{1}{2}\cdot2^n-\left(-\frac{1}{4}\right)2^n=\underbrace{2^n}_{\oplus}\underbrace{\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)}_{\ominus}<0$ KLES.

- OMEZENOST

POZNÁMKA: Fce f se nazývá shora (zdola) omezená $\iff$ $\exists\, h \in R\ [d \in R]$: $x \in D$ je $f(x) \leq h$ $[f(x) \geq d]$ ($f(x)$ = y)

Fce f se naz. omezená $\iff$ je shora i zdola omezená

Def.: Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá

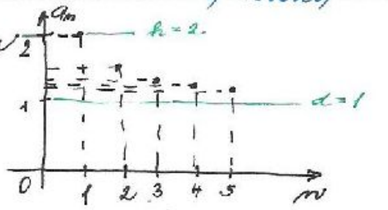
SHORA OMEZENÁ $\iff$ $\exists\, h \in R$ takové, že pro $\forall n \in N$ je $a_n \leq h$

ZDOLA OMEZENÁ $\iff$ $\exists\, d \in R$ takové, že pro $\forall n \in N$ je $a_n \geq d$

Posloupnost se nazývá OMEZENÁ $\iff$ je SHORA I ZDOLA OMEZENÁ, tj. když $\exists\, h, d \in R$: $\forall n \in N$: $d \leq a_n \leq h$

(8) Rozhodněte, zda daná posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je omezená shora, zdola, omezená.

a) $a_n = \frac{n+1}{n}$ $\quad \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \dots$? $\quad$ – z grafu



- omezenost zdola

$\uparrow a_n \geq d$, d

např. $d = 1$ [třeba i 0; 0,5; ...]

$a_n \geq 1$

$\frac{n+1}{n} \geq 1 \quad / \cdot n,\ n > 0$

$n+1 \geq n$

$1 \geq 0$ pl. pro $\forall n \in N$ $\Rightarrow$ OMEZENÁ ZDOLA

- omezenost shora

h, $\downarrow a_n \leq h$

např. $h = 2$ (nejmenší) [třeba i 2,5; 3, ...]

$a_n \leq 2$

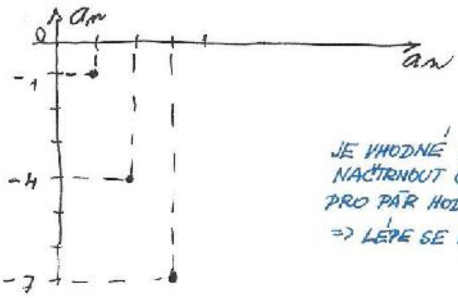
$\frac{n+1}{n} \leq 2$

$n+1 \leq 2n$

$1 \leq n$ platí pro $\forall n \in N$ $\Rightarrow$ OMEZENÁ SHORA

$\Big\}$ OMEZENÁ

b) $a_n = 2 - 3n$ $\quad -1, -4, -7, -10, \dots$



JE VHODNÉ SI NAČRTNOUT GRAF PRO PÁR HODNOT $\Rightarrow$ LÉPE SE VOLÍ h, d

- omezenost shora

- zvr. např. $h = 0$

$a_n \leq h$

$2 - 3n \leq 0$

$-3n \leq -2$

$\underbrace{n \geq \frac{2}{3} \wedge n \in N}$

platí pro $\forall n \in N$ $\Rightarrow$ omezená shora

- omezenost zdola

- zvr. např. $d = -1000$

$a_n \geq -1000$

$2 - 3n \geq -1000$

$-3n \geq -1002$

$3n \leq 1002$

$n \leq 334$

pouze do 334 členu je $a_n \geq -1000$, pak ne $\Rightarrow$ NENÍ OMEZENÁ ZDOLA

9) dokažte, že posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou omezené

a) $a_n = \frac{5n-1}{n+2}$ $\quad a_1 = \frac{5-1}{3} = \frac{4}{3} \quad a_2 = \frac{5.2-1}{2+2} = \frac{9}{4} \quad a_3 = \frac{5.3-1}{3+2} = \frac{14}{5} \quad a_4 = \frac{5.4-1}{4+2} = \frac{19}{6}$

1. ? OMEZENÁ SHORA $\quad h = 5$ např.

$a_n \leqq 5$

$\frac{5n-1}{n+2} \leqq 5$

$5n-1 \leqq 5n+10$

$-1 \leqq 10 \quad (0n \leqq 11)$

pl. pro $\forall n \in N$

=> OMEZENÁ SHORA

2. ? OMEZENÁ ZDOLA

$d = 1$ např. $a_n \geqq 1$

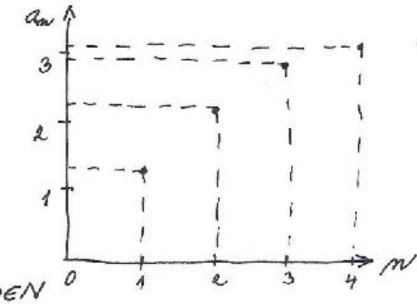
$\frac{5n-1}{n+2} \geqq 1$

$5n-1 \geqq n+2$

$4n \geqq 3$

$n \geqq \frac{3}{4} \wedge n \in N$

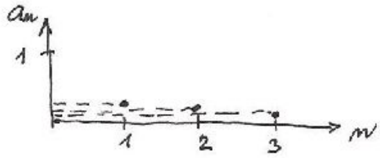
platí pro $\forall n \in N$ => OMEZENÁ ZDOLA



$a_{98} = \frac{5.98-1}{100} = 4{,}71$

OMEZENÁ POSLOUPNOST

b) $a_n = \frac{1}{2+3n}$ $\quad a_1 = \frac{1}{5}, \; a_2 = \frac{1}{2+6} = \frac{1}{8}, \; a_3 = \frac{1}{2+3.3} = \frac{1}{11}, \; \dots$



1. ? OMEZENÁ SHORA např. $h = 1$ $\quad (h = \frac{1}{5})$

$a_n \leqq 1$

$\frac{1}{2+3n} \leqq 1$

$1 \leqq 2+3n$

$3n \geqq -1$

$n \geqq -\frac{1}{3} \wedge n \in N$

$\left[\; a_n \leqq \frac{1}{5} \quad \frac{1}{2+3n} \leqq \frac{1}{5} \quad 5 \leqq 3n+2 \quad 3n \geqq 3 \quad n \geqq 1 \text{ pl. } \forall n \in N \;\right]$

pl. pro $\forall n \in N$ => OMEZENÁ SHORA

2. ? OMEZENÁ ZDOLA

např. $d = 0$

$a_n \geqq 0$

$\frac{1}{2+3n} \geqq 0$ pro $\forall n \in N$ pl.

$\left[\; d = -1 \quad \frac{1}{2+3n} \geqq -1 \quad 1 \geqq -2-3n \quad 3n \geqq -3 \quad n \geqq -1 \wedge n \in N \;\right]$

pl. pro $\forall n \in N$

OMEZENÁ ZDOLA

OMEZENÁ